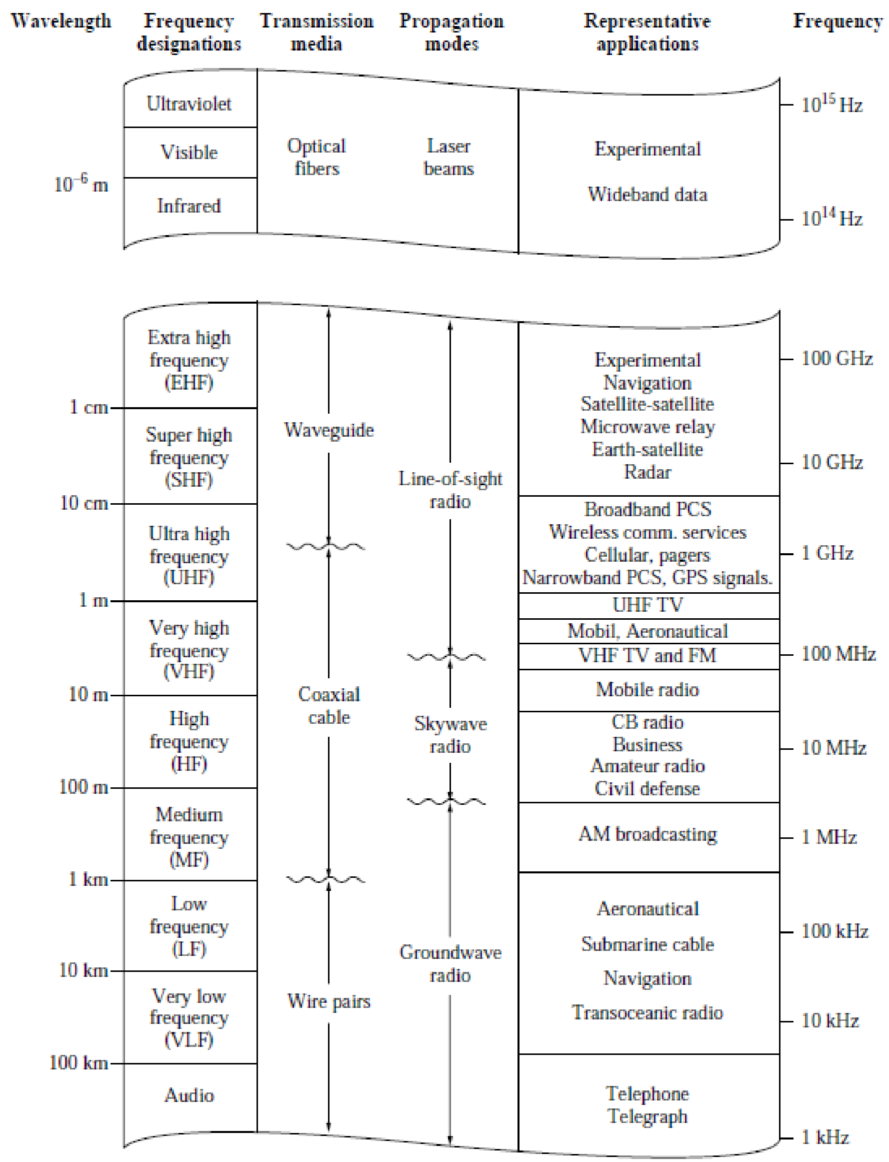
سیستم های مخابراتی

فصل سوم: تبدیل فوریه بر حسب فرکانس

سید مهدی سجادیه

مثلثات (یادآوری)



تبدیل فوریه

- f : فرکانس موج

- w: فرکانس زاویه ای

$$\omega = 2\pi f$$

- دسته بندی سیگنال‌های مورد استفاده در درس:
  - توان (سیگنال های متناوب) سری فوریه
  - انرژی (سیگنال های محدود) تبدیل فوریه

سری فوریه

- فرض کنید v(t) یک سیگنال توان (متناوب) با دوره تناوب T0 (f0=1/T0) باشد در این صورت سری فوریه آن به صورت زیر است:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

که ضرایب سری فوریه برابر است با:

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

مقدار dc یک سیگنال متناوب

$$c(0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t)\, dt = \langle v(t) \rangle$$

اگر سیگنال حقیقی باشد:

$$c_{-n} = c_n^* = |c_n|\, e^{-j \arg c_n}$$

توان سیگنال

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Definition (Fourier Transform)

$$X(f) = \int x(t)\exp(-j2\pi ft)dt$$
$$x(t) = \int X(f)\exp(j2\pi ft)df$$

$x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|}X(\frac{f}{a})$ Time-frequency reciprocity

$x(t-t_0) \rightarrow \exp(-j2\pi t_0 f)X(f)$ Time shift does not frequency band

It is **MULTIPLYING BY SINUSOIDS** that changes the frequency band

$$x(t)\exp(j2\pi f_c t) \rightarrow X(f-f_c)$$
$$x(t)\cos(2\pi f_c t) \rightarrow \frac{1}{2}(X(f-f_c)+X(f+f_c))$$
$$x(t)\sin(2\pi f_c t) \rightarrow \frac{1}{2j}(X(f-f_c)-X(f+f_c))$$

مثال

- تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید.

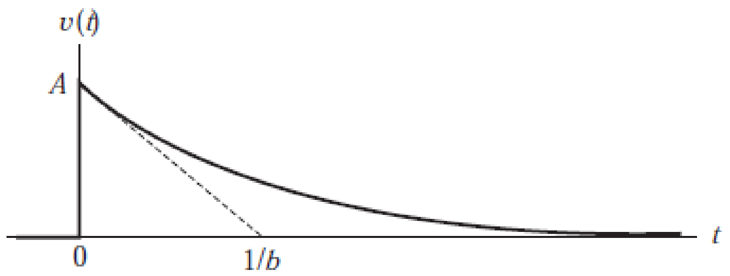
$$v(t) = \begin{cases} Ae^{-bt} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

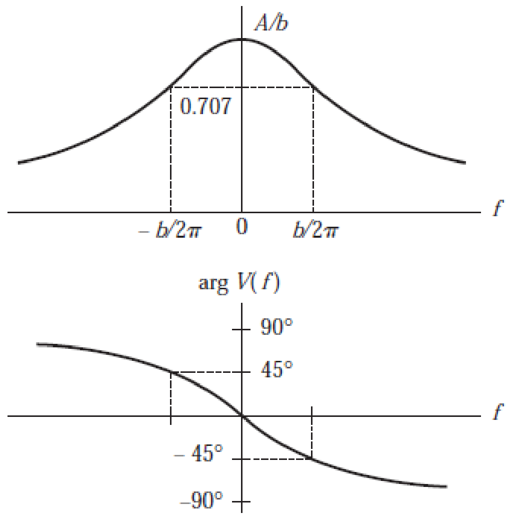
- حل

$$V(f) = \frac{A}{b + j2\pi f} = \frac{b - j2\pi f}{b^2 + (2\pi f)^2} A$$

$$V_e(f) = \mathrm{Re}\,[V(f)] = \frac{bA}{b^2 + (2\pi f)^2}$$

$$V_o(f) = \mathrm{Im}\,[V(f)] = -\frac{2\pi f A}{b^2 + (2\pi f)^2}$$





ویژگی های تبدیل فوریه

- قضیه پارسوال و رایلی

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)\, V^*(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2\, df$$

$$G_V(f) = |V(f)|^2 \quad (\text{چگالیطیف} \qquad)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, w^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)\, W^*(f)\, df$$

- دوگانی

$$V(f) = \mathcal{F}[v(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$z(t) = V(t)$$

$$\mathcal{F}[z(t)] = v(-f)$$

- مدولاسیون

$$v(t)\cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{e^{j\phi}}{2} V(f - f_c) + \frac{e^{-j\phi}}{2} V(f + f_c)$$

ویژگی های تبدیل فوریه

- انتگرال

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \rightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} \quad (\text{if } X(0)=0)$$

- مشتق

$$\frac{d}{dt}v(t) \leftrightarrow j2\pi f V(f)$$

- و تعمیم

$$\frac{d^n}{dt^n}v(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n V(f)$$

- دوگان مشتق

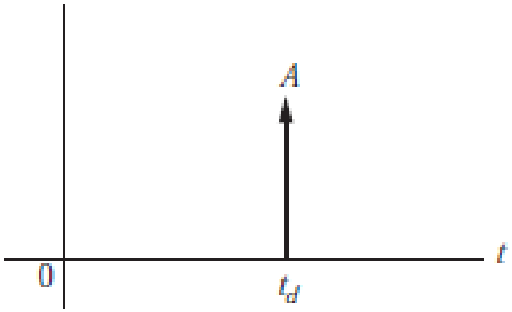
$$t^n v(t) \leftrightarrow \frac{1}{(-j2\pi)^n}\frac{d^n}{df^n}V(f)$$

- کانولوشن و دوگان

$$v(t) * w(t) \leftrightarrow V(f)W(f)$$

$$v(t)w(t) \leftrightarrow V(f) * W(f)$$

- سیگنال ضربه با دامنه و شیفت زمانی



$$A\delta(t - t_d).$$

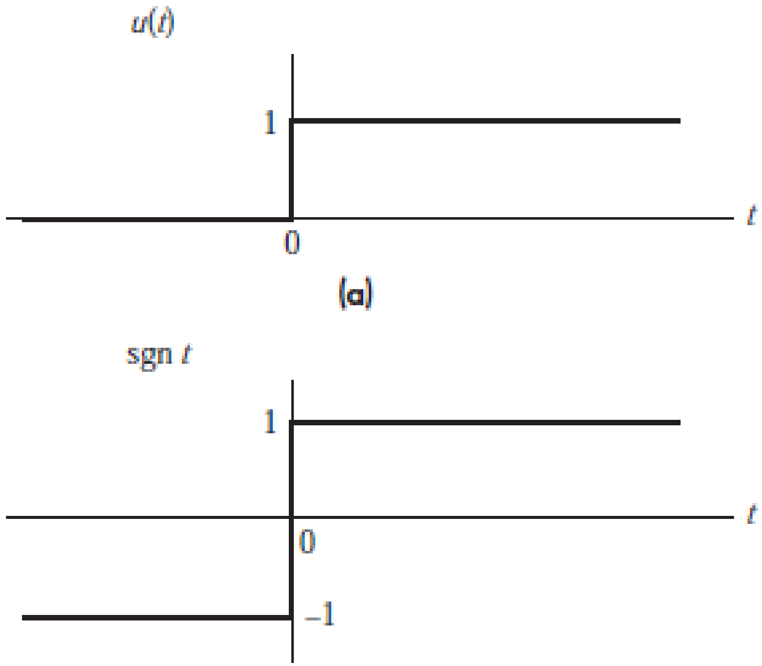
- سه ویژگی مهم سیگنال ضربه

$$v(t) * \delta(t - t_d) = v(t - t_d)$$

$$v(t)\,\delta(t - t_d) = v(t_d)\,\delta(t - t_d)$$

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t) \qquad \alpha \neq 0$$

سیگنال پله و علامت



- **sgn(t)=2u(t)-1**

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

- **نکته مهم: دقت کنید اگر در سیگنالی پرش در نقطه t0 به اندازه A وجود داشته باشد در مشتق آن به اندازه مقدار پرش تابع $A\delta(t-t_0)$ به وجود می آید**

چند تبدیل فوریه مهم

$$A\,\delta(t) \leftrightarrow A$$

$$Ae^{j\omega_c t} \leftrightarrow A\,\delta(f - f_c)$$

$$A\cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{Ae^{j\phi}}{2}\delta(f - f_c) + \frac{Ae^{-j\phi}}{2}\delta(f + f_c)$$

$$\frac{A}{\tau}\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow A\,\mathrm{sinc}\, f\tau$$

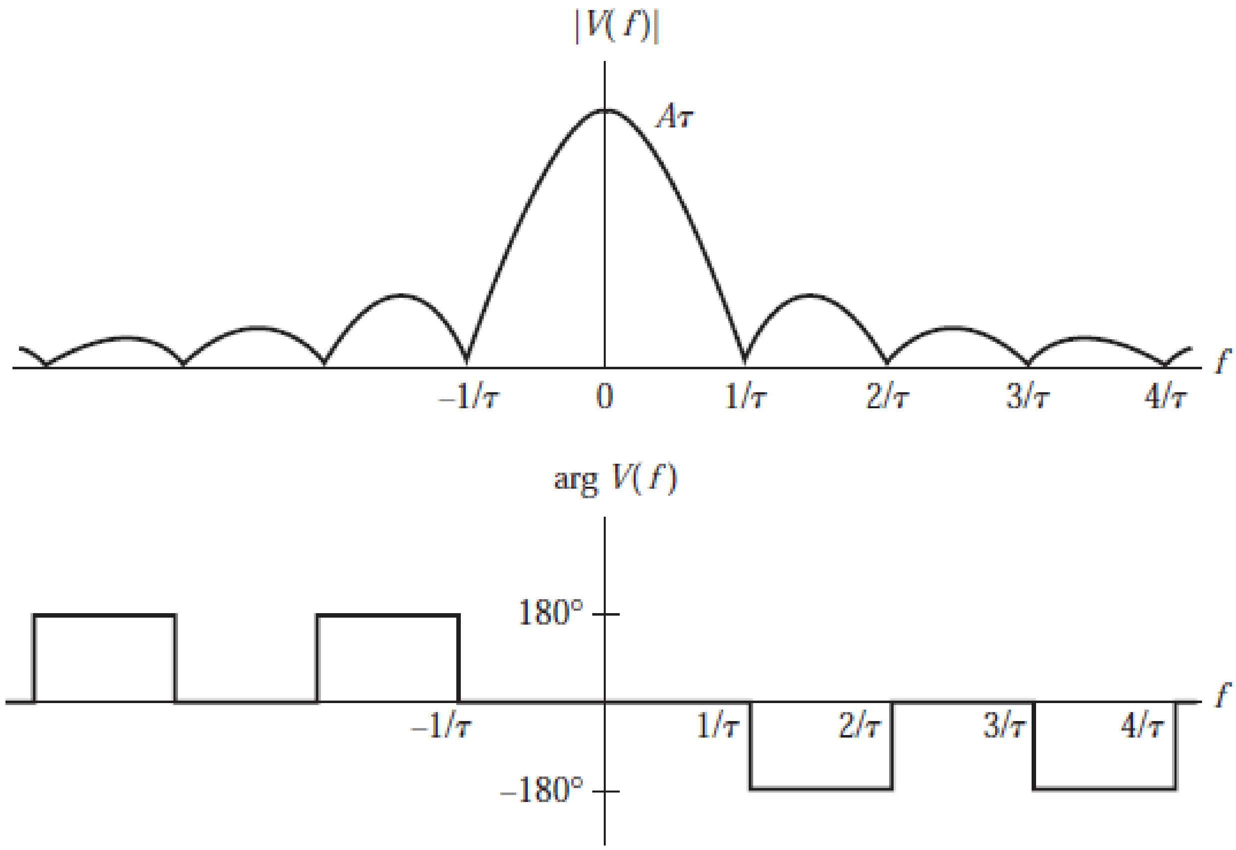
$$\Pi(t/\tau) \triangleq \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

$$v(t) = A\Pi(t/\tau)$$

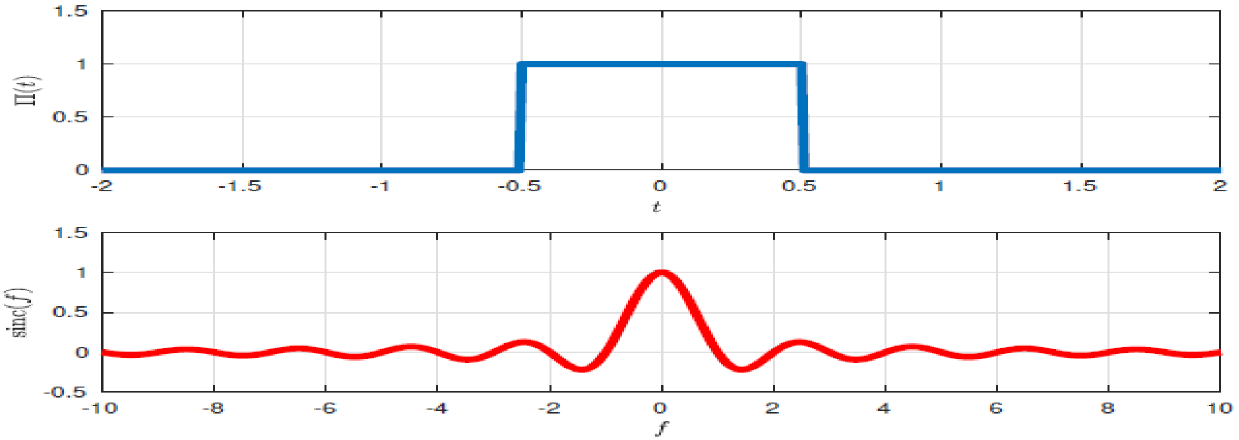
$$V(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j2\pi ft}\,dt = \frac{A}{\pi f}\sin \pi f\tau$$

$$= A\tau\,\mathrm{sinc}\, f\tau$$

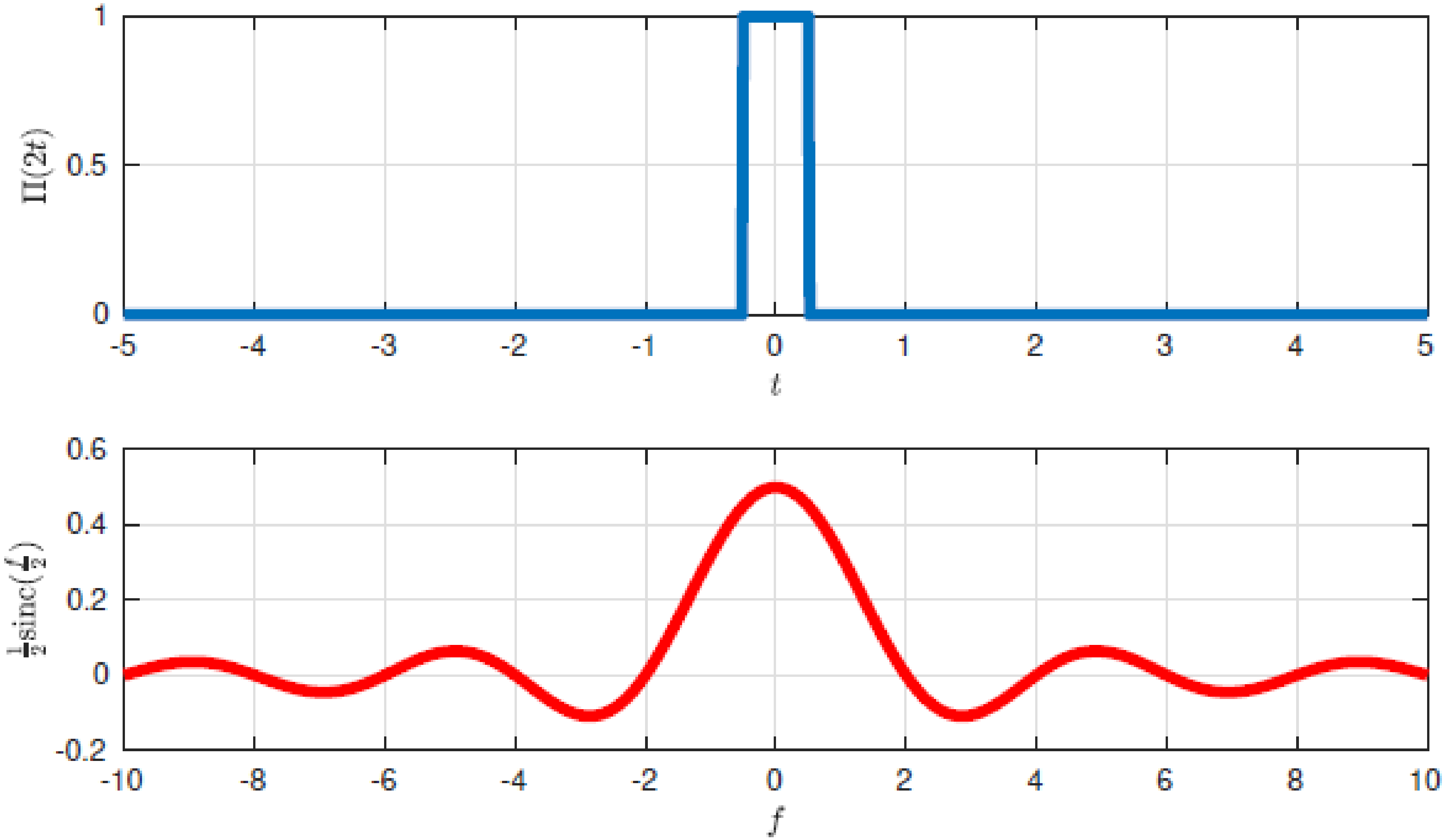
اندازه و زاویه تبدیل فوریه rect



مثال



ادامه مثال



$\Pi(2t)$
1
0.5
0
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
t
$\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\frac{f}{2})$
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10
f

سایر ویژگیهای تبدیل فوریه

$$V(f) = V_e(f) + jV_o(f)$$

$$\mathrm{Re}\,[V(f)] = V_e(f) \qquad \mathrm{Im}\,[V(f)] = V_o(f)$$

$$V_e(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \cos 2\pi ft\, dt$$

$$V_o(f) \triangleq -\int_{-\infty}^{\infty} v(t) \sin 2\pi ft\, dt$$

- اگر سیگنال زوج باشد

$$V(f) = V_e(f) = 2\int_{0}^{\infty} v(t) \cos \omega t\, dt$$

- اگر سیگنال فرد باشد

$$V(f) = jV_o(f) = -j2\int_{0}^{\infty} v(t) \sin \omega t\, dt$$

- اگر سیگنال حقیقی باشد **V(f)=V*(-f)** و در این صورت اندازه دارای تقارن نسبت محور عمودی دارد و زاویه نسبت به مبدا مختصات متقارن است

روابط ریاضی نسبتاً مهم در اعداد مختلط

- در ادامه اگر سیستم یا سیگنالی حقیقی بود تنها قسمت مثبت تبدیل فوریه آن رسم می شود

$$e^{j2\theta_1} \pm e^{j2\theta_2} = [e^{j(\theta_1-\theta_2)} \pm e^{-j(\theta_1-\theta_2)}]e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

$$= \begin{cases} 2\cos(\theta_1 - \theta_2)e^{j(\theta_1+\theta_2)} \\ j2\sin(\theta_1 - \theta_2)e^{j(\theta_1+\theta_2)} \end{cases}$$

مثال

- تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید

$$z(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos\omega_c t$$

- حل
- با توجه به رابطه مدولاسیون $v(t)\cos(\omega_c t+\phi) \leftrightarrow \frac{e^{j\phi}}{2}V(f-f_c) + \frac{e^{-j\phi}}{2}V(f+f_c)$
و تغییر مقیاس $x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|}X(\frac{f}{a})$ داریم:

$$Z(f) = \frac{A\tau}{2}\,\mathrm{sinc}\,(f-f_c)\tau + \frac{A\tau}{2}\,\mathrm{sinc}\,(f+f_c)\tau$$

تبدیل فوریه سیگنالهای متناوب

- فرض کنید v(t) یک سیگنال متناوب باشد:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt\right]e^{j2\pi n f_0 t}$$

- سری فوریه سیگنال های مرتبط

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)e^{j2\pi n f_0 t} \Longrightarrow V(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)\,\delta(f - nf_0)$$

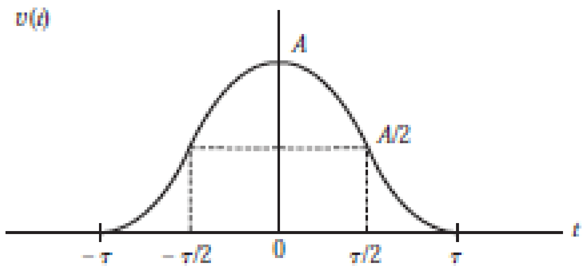
$$G_V(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)\delta(f - nf_0)$$

مثال

- تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید.

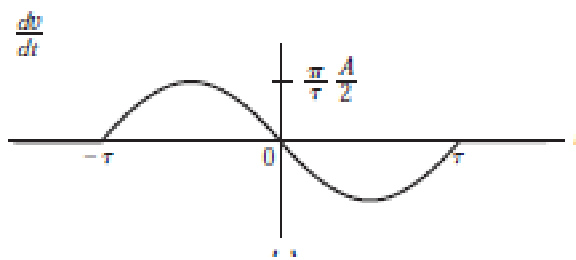
$$v(t) = \frac{A}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi t}{\tau}\right)\Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right)$$

- حل ابتکاری: شکل سیگنال



- مشتق سیگنال و شکل آن

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\left(\frac{\pi}{\tau}\right)\frac{A}{2}\sin\frac{\pi t}{\tau}\Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right)$$



- مشتق سوم سیگنال

$$\frac{d^3}{dt^3}v(t) = \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^3\frac{A}{2}\sin\frac{\pi t}{\tau}\Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right) + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\frac{A}{2}\delta(t+\tau) - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\frac{A}{2}\delta(t-\tau)$$

ادامه حل مثال

$$\frac{d^3}{dt^3}v(t) = \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^3 \frac{A}{2}\sin\frac{\pi t}{\tau}\,\Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right) + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\frac{A}{2}\delta(t+\tau) - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\frac{A}{2}\delta(t-\tau)$$

- با توجه به اینکه قسمت اول برابر ضریب مشتق v(t) است برای تبدیل فوریه داریم:

$$(j2\pi f)^3 V(f) = -\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 (j2\pi f)V(f) + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\frac{A}{2}\left(e^{j2\pi f\tau} - e^{-j2\pi f\tau}\right)$$

- در این صورت

$$V(f) = \frac{jA\sin 2\pi f\tau}{j2\pi f + (\tau/\pi)^2 (j2\pi f)^3} = \frac{A\tau \operatorname{sinc} 2f\tau}{1-(2f\tau)^2}$$

نکته

- اگر $\tilde{x}(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب **T0** باشد و

$$x(t)=\begin{cases}\tilde{x}(t) & \dfrac{-T0}{2}\le t<\dfrac{T0}{2}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- در این صورت ضرایب فوریه $\tilde{x}(t)$ با استفاده از ضرایب سری فوریه **X(f)** به صورت زیرمحاسبه می شود:

$$c(nf_0)=\frac{1}{T_0}X(nf_0), \qquad f_0=\frac{1}{T_0}$$

مثال

- فرض کنید

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1 & \frac{-1}{2} \le t < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \le t < \frac{5}{2} \end{cases}, \qquad \tilde{x}(t) = \tilde{x}(t+3)$$

- در این صورت

$$x(t) = \Pi(t) \xrightarrow{F} X(f) = \sin c(f),$$

و چون T=3 در این صورت

$$c(nf_0) = \frac{1}{3}\sin c(\frac{n}{3}), \qquad f_0 = \frac{1}{3}$$

انتقال سیگنال و فیلتر کردن

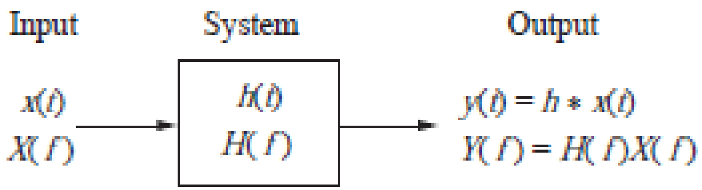
- **انتقال**: فرآیند جابه جایی سیگنال از نقطه ای به نقطه دیگر
- **فیلتر کردن**: تغییر مولفه های فرکانسی سیگنال بر اثر عبور از یک سیستم یا کانال

نکته : فیلتر کردن تنها برای کانال یا سیستم های LTI معنی دارد.

- اثرات مخرب کانال روی سیگنال
  - **اعوجاج**: تغییر شکل موج که ناشی از تاثیر پاسخ فرکانسی است.
  - **تداخل**: اثر سیگنال های مشابه با سیگنال اصلی است که موجب خراب شده سیگنال به طور ناخواسته می شود.
  - **نویز**: سیگنال های تصادفی ناخواسته که باعث خراب شدن سیگنال اصلی می شود.
- اگر $x(t)$ ورودی یک کانال و $y(t)$ خروجی یک کانال (سیستم) باشد در صورتی که $y(t)=kx(t-t_d)$ گوییم سیگنال دارای اعوجاج نیست.

سیستم های LTI

- فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم LTI برابر **h(t)** باشد:



- در این صورت

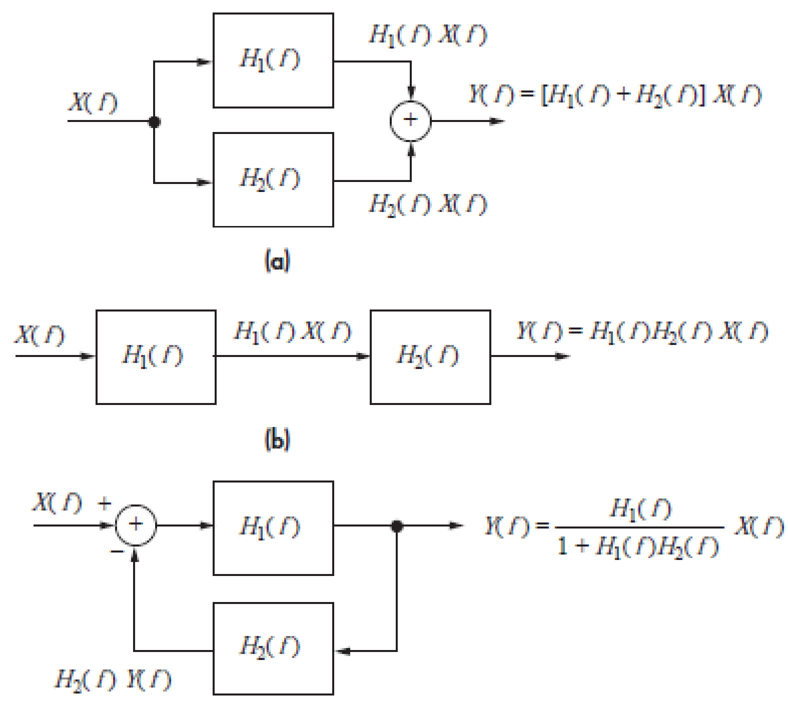
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \Rightarrow G_Y(f) = |H(f)|^2 G_X(f)$$

- اگر سیستم بدون اعوجاج باشد (**$y(t)=kx(t-t_d)$**)

$$H(f) = \frac{ke^{-j2\pi f t_d} X(f)}{X(f)} = ke^{-j2\pi f t_d}$$

Table 3.1-1

Time-Domain Operation		Transfer Function
Scalar multiplication	$y(t) = \pm K x(t)$	$H(f) = \pm K$
Differentiation	$y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$	$H(f) = j2\pi f$
Integration	$y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$	$H(f) = \dfrac{1}{j2\pi f}$
Time delay	$y(t) = x(t - t_d)$	$H(f) = e^{-j2\pi f t_d}$



اعوجاج در سیستم های LTI

- **اعوجاج خطی**
  - اعوجاج دامنه ($|H(f)| \neq k$)
  - اعوجاج فاز

$$\angle H(f) \neq j2\pi f t_d \pm m\pi$$

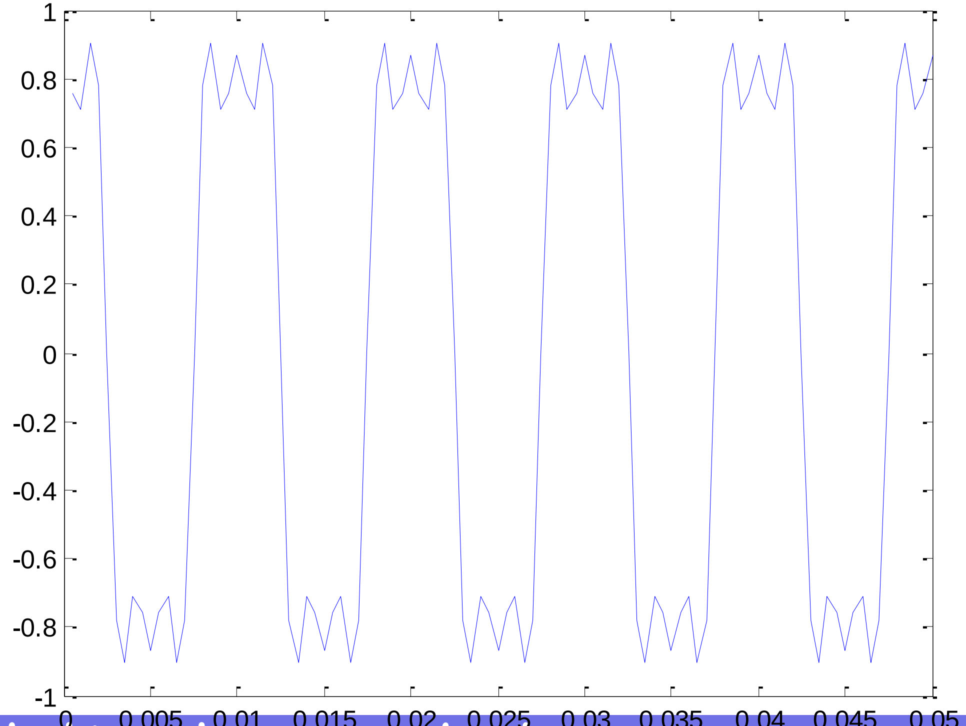
- **اعوجاج غیر خطی**
  - رابطه غیر خطی بین ورودی و خروجی
  - مانند $y(t)=x^2(t)$

مثال(بررسی تغییر اندازه و فاز (H(f))

- فرض کنید

$$x(t)=\cos(2\pi*100*t)-\frac{1}{3}\cos(2\pi*300*t)+\frac{1}{5}\cos(2\pi*500*t)$$

در این صورت x(t) را ر سم کنید.

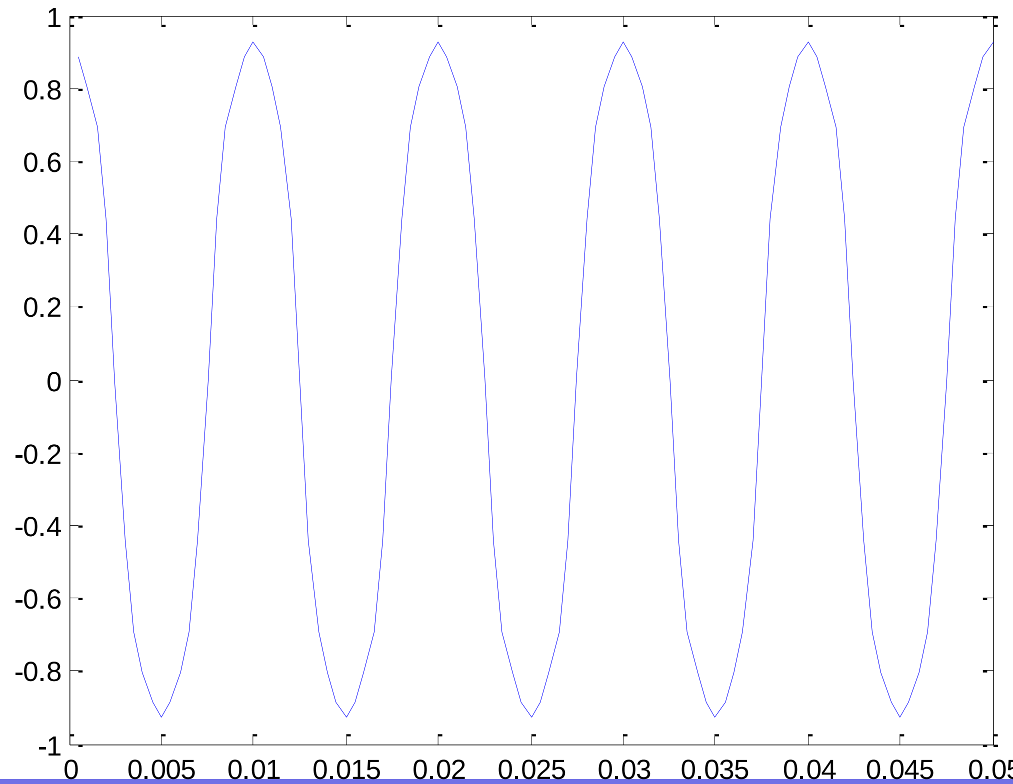


مثال(بررسی تغییر اندازه و فاز (H(f)

- فرض کنید

$$x(t)=\cos(2\pi*100*t)-\frac{1}{9}\cos(2\pi*300*t)+\frac{1}{25}\cos(2\pi*500*t)$$

در این صورت x(t) را ر سم کنید.



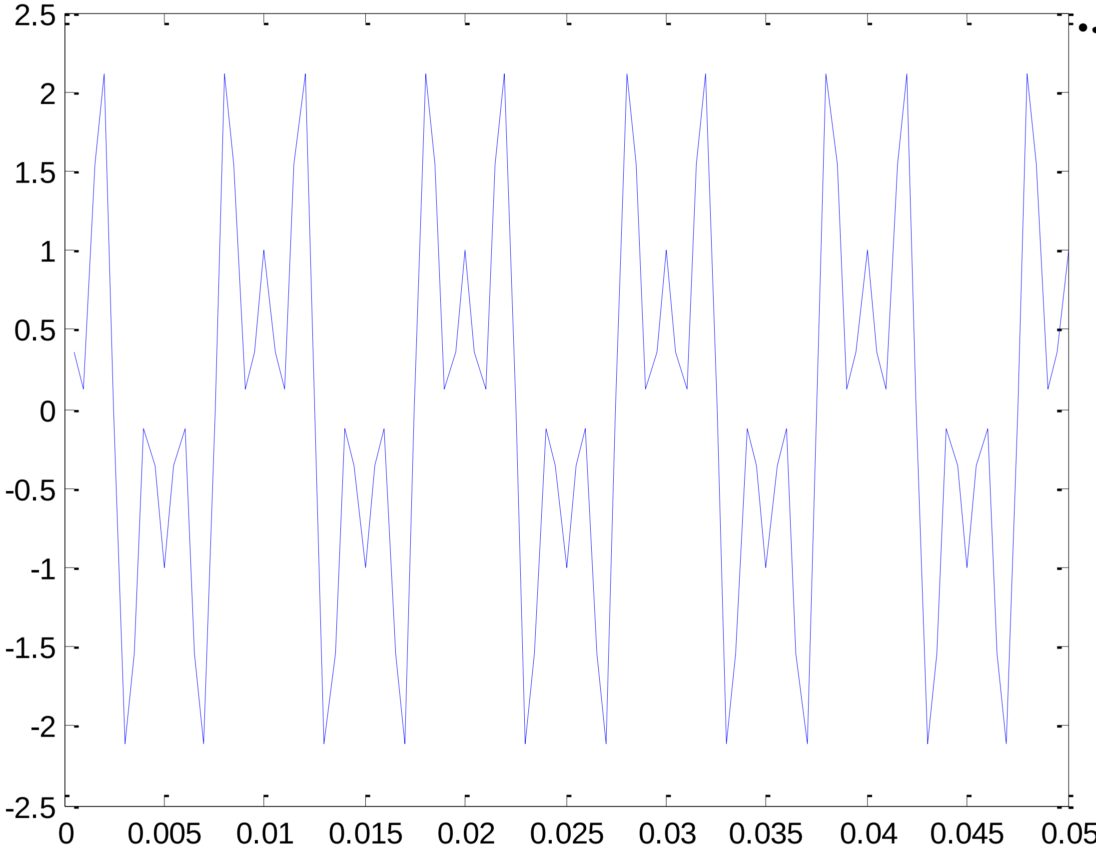
$$H(f)=\frac{1}{f/100}$$

مثال(بررسی تغییر اندازه و فاز (H(f))

- فرض کنید

$$x(t) = \sin(2\pi * 100 * t) - \cos(2\pi * 300 * t) + \cos(2\pi * 500 * t)$$

در این صورت **x(t)** را ر سم کنید.



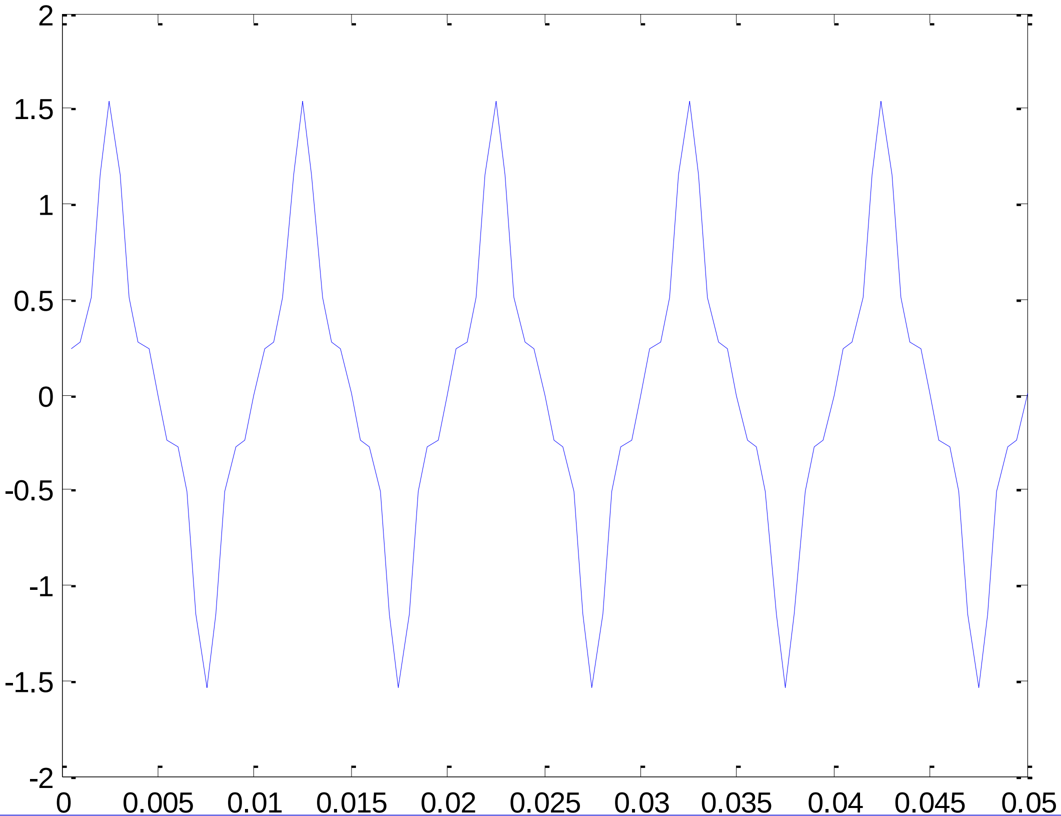
$$H(f) = f / 100$$

مثال(بررسی تغییر اندازه و فاز (H(f)

- فرض کنید

$$x(t)=\cos(2\pi*100*t+\frac{\pi}{2})-\frac{1}{3}\cos(2\pi*300*t+\frac{\pi}{2})+\frac{1}{5}\cos(2\pi*500*t+\frac{\pi}{2})$$

در این صورت x(t) را ر سم کنید.



$$H(f)=\begin{cases} e^{j\frac{\pi}{2}} & f>0 \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} & f<0 \end{cases}$$

عبور سیگنال از سیستم خاص

- فرض کنید سیستم LTI دارای پاسخ فرکانسی زیر باشد:

$$H(f) = \begin{cases} Ae^{j(-2\pi f t_g + \varphi_0)} & f > 0 \\ Ae^{j(-2\pi f t_g + \varphi_0)} & f < 0 \end{cases}$$

- اگر x(t) یک سیگنال میانگذر باشد خروجی سیستم را به دست آورید.
- فرم کلی سیگنال میانگذر

$$x(t) = x_1(t)\cos\omega_c t - x_2(t)\sin\omega_c t$$

- خروجی سیستم

$$y(t) = Ax_1(t - t_g)\cos\left[\omega_c(t - t_g) + \phi_0\right] - Ax_2(t - t_g)\sin\left[\omega_c(t - t_g) + \phi_0\right]$$

سپاس